江口 [illegible]

数学ノート（2017/11/30(木)）

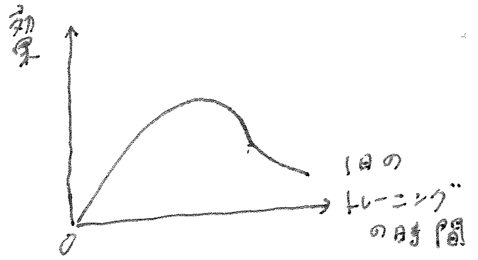
関数とは、$y=f(x)$ という形で（多くの学生は直観的に）理解していると思うけれども

要は

「xの値がコレコレのとき、yの値はカクカクである」

という関係性（の全体像）を表したもの

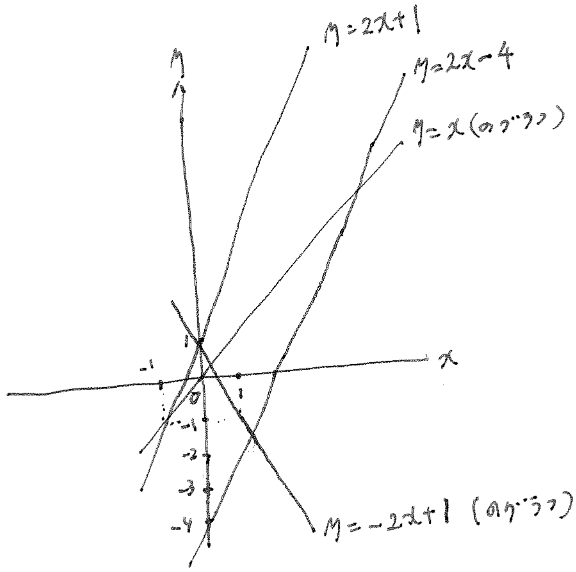
関数の例



（← グラフ。グラフとは関数をビジュアルに描いたもの）

一次関数（または線型関数）

$\underbrace{y=ax+b}_{（ただし\ x\in R）}$ という型の関数を1次関数または線型関数という。



一次関数の例

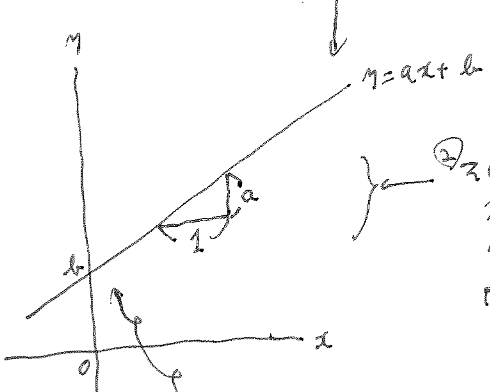
$y=x$ （← 立派な1次関数）

$y=2x+1$

$y=2x-4$

$y=-2x+1$

$y=ax+b$ のグラフは ① 一般にこのように直線になる



② そして
xの値が1だけ大きくなると
yの値はaだけ増える。そのため
「傾きがaである」という。

③ そして、y軸との交点（それを切片（せっぺん）という）は、
（$x=0$のときのyの値であるので）bになる。

江口 滑

2次関数

$y = ax^2 + bx + c$ (ただし $x \in \mathbb{R}$) という型の関数を2次関数という。

2次関数の例

$y = x^2$

$y = 3x^2 + 6x - 5$

$y = 2x^2 - 4x + 8$ などなど。

この2次関数、実はこのままの状態ではどんな関数かは今ひとつ分からない。
そこで、変形してみる

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a \times \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

これが、$y = ax^2 + bx + c$ という2次関数の「本当の姿」というところ

すなわち

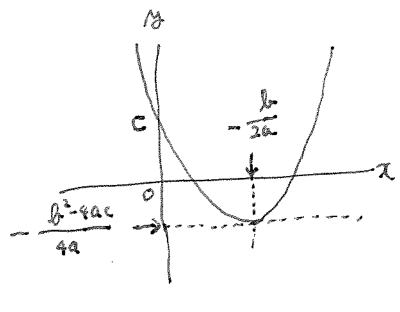
$$
\begin{aligned}
y &= ax^2 + bx + c \\
&= \underbrace{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{} - \underbrace{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}_{}
\end{aligned}
$$

という2次関数は

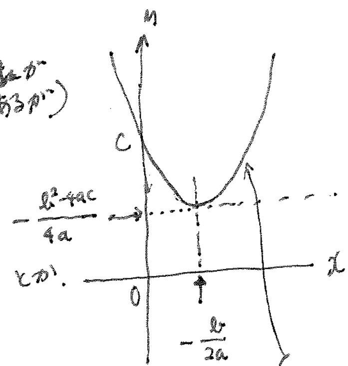
この部分は $x = -\frac{b}{2a}$ のとき 0 (ゼロ) になり、x が $-\frac{b}{2a}$ から離れていくにつれて大きな値をとる

この部分は、x が入って来ていないので x の値が何であろうと一定の値

つまりグラフにすると (a, b, c の値によっていろいろな2次関数があるが)



とか、



などのようになる

$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ のグラフは、

「$-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ という値の上に $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ の値が乗っかっている」

というイメージ

2次関数の基本は $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = -x^2$, $y = -2x^2$ など

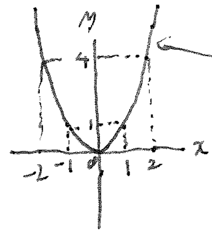
$y = x^2$ ← $x = 0$ ならば $y = 0 \times 0 = 0$

$x = 1$ のとき $y = 1 \times 1 = 1$

$x = 2$ のとき $y = 2 \times 2 = 4$

$x = -1$ のとき $y = (-1) \times (-1) = 1$

$x = -2$ のとき $y = (-2) \times (-2) = 4$



$y = x^2$ のグラフはこんな風になる

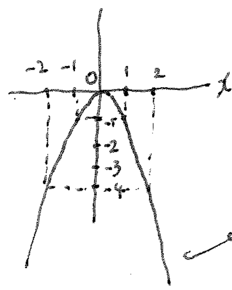
$y = -x^2$ $(= -1 \times x^2)$ ← $x = 0$ のとき $y = -1 \times 0 \times 0 = 0$

$x = 1$ のとき $y = -1 \times 1 \times 1 = -1$

$x = 2$ のとき $y = -1 \times 2 \times 2 = -4$

$x = -2$ のとき $y = -1 \times (-2) \times (-2) = -4$

$x = -1$ のとき $y = -1 \times (-1) \times (-1) = -1$



$y = -x^2$ のグラフはこんなふうになる

先にすすむ前に、2次関数を計算できるためには

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) &= a \times a + a \times b + b \times a + b \times b \\
&= a^2 + ab + ba + b^2 \\
&= a^2 + ab + ab + b^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

ということ

$$
\begin{aligned}
(a-b)^2 = (a-b) \times (a-b) &= a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) \\
&= a^2 - ab - ba + b^2 \\
&= a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2
\end{aligned}
$$

ということ、

この「公式」(これは日本では中学2年生くらいで習う)を知っておかなくてはならない

この $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

という公式を知っていない学生にはさすがに「木曜3限の数学の単位」はさし上げにくいぞ。

江口 渚

ついでに 3次関数

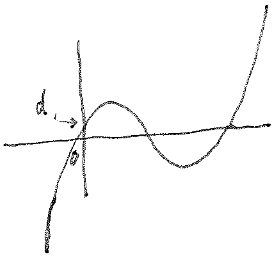
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ という型の関数を 3次関数という

（→ $y = ax + b$ が $\underline{1次関数}$
$y = ax^2 + bx + c$ が $\underline{2次関数}$
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $\underline{3次関数}$）

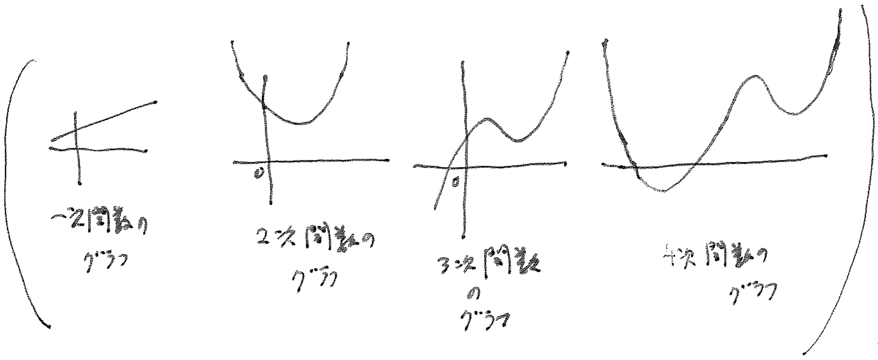
ちなみに、3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ は、どんな関数なのか、「本当の姿（← $y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ みたいな「本当の姿」）」というのはハッキリ言って、難い（分かるな…）。

Q：では $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ というのは何関数というでしょう？

ただ、グラフは



← こんなかんじになる



☆ 3次関数や4次関数は、この先、めったに出くわすことはないのですが、少しだけ出くわすことがある。その際に3次関数の計算がすぐにできるために、次の公式（日本だと高校1年生が知っている公式）を知っているように。

$(a+b)^3 = \cdots（中略）\cdots = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a-b)^3 = \cdots（中略）\cdots = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

← この2つのビミョウなちがいに気を付けるべし

を知っておくこと。

ちなみに

$(a+b)^1 = a + b = 1 \times a + 1 \times b$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \times a^2 + 2 \times ab + 1 \times b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 1 \times a^3 + 3 \times a^2b + 3 \times ab^2 + 1 \times b^3$

$(a+b)^4 = \cdots\cdots = \underline{\quad}a^4 + \underline{\quad}a^3b + \underline{\quad}a^2b^2 + \underline{\quad}ab^3 + \underline{\quad}b^4$ ← 分かるかな？

したがって、例えば

$(x+h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$a(x+h)^2 = a \times [x^2 + 2hx + h^2] = ax^2 + 2ahx + ah^2$

$(x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$a(x+h)^3 = a[x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3] = ax^3 + 3ahx^2 + 3\overset{a}{}h^2x + ah^3$

$(x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2hx + h^2$

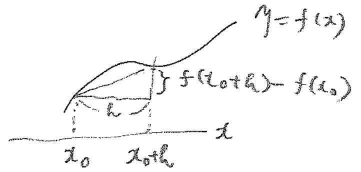
$(x+h)^3 - x^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3 = 3hx^2 + 3h^2x + h^3$

江口 潜
2017/12/21

平均変化率

連続な関数 $y=f(x)$ $(x\in R)$ について、点 $x_0\in R$ における平均変化率というものを考える。

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ ← これが点 x_0 における平均変化率



意味としては

「xの値がx_0から$\underset{(1だけ)}{\underline{h}}$だけふえたら、$\underset{(関数)}{f(x)}$の値はどれだけふえるか、その増え方（化度合）」

（例）2次関数 $y=\overbrace{ax^2+bx+c}^{f(x)=}$ $(x\in R)$ の、点 x_0 における平均変化率を求めると

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= a(x_0+h)^2+b(x_0+h)+c\\
&= a[x_0^2+2hx_0+h^2]+bx_0+bh+c\\
&= ax_0^2+2ahx_0+ah^2+bx_0+bh+c
\end{aligned}
$$

一方、$f(x_0)=ax_0^2+bx_0+c$

したがって、$f(x_0+h)-f(x_0)=2ahx_0+ah^2+bh$

したがって 平均変化率 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\dfrac{2ahx_0+ah^2+bh}{h}=2ax_0+ah+b$ ← これが点 x_0 における（xがhふえたときの）平均変化率

（例）3次関数 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(x\in R)$ の、点 x_0 における平均変化率

$$
\begin{aligned}
f(x_0+h) &= a[x_0+h]^3+b[x_0+h]^2+c[x_0+h]+d\\
&= a[x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3]+b[x_0^2+2x_0h+h^2]+cx_0+ch+d\\
&= ax_0^3+3ahx_0^2+3ah^2x_0+ah^3+bx_0^2+2bhx_0+bh^2+cx_0+ch+d\\
f(x_0) &= ax_0^3+bx_0^2+cx_0+d\\
f(x_0+h)-f(x_0) &= 3ahx_0^2+3ah^2x_0+ah^3+2bhx_0+bh^2+ch
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= 3ax_0^2+3ahx_0+ah^2+2bx_0+bh+c\\
&= 3ax_0^2+(3ah+2b)x_0+ah^2+bh+c
\end{aligned}
$$

← これが点 x_0 における平均変化率

微分

平均変化率 $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ の値は、hの値のとり方（hをどう選ぶか）により異なる。（それでは「困る」ので）hを0に近づけていく、すなわち

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ というもの（これは、$\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ という平均変化率の、$h\to 0$としたときの値）を調べてみて、

本当にあるとは限らない!!

もし、その値が（1つ）あれば、それを、関数 $y=f(x)$ の、点 x_0 における微分係数という。

（例）2次関数 $y=ax^2+bx+c$ $(x\in R)$ の場合

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}[2ax_0+ah+b]=2ax_0+\lim_{h\to 0}[ah]+b=2ax_0+b$$

↑ これが $y=ax^2+bx+c$ の点 x_0 における微分係数

（例）3次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(x\in R)$ の場合

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}[3ax_0^2+(3ah+2b)x_0+ah^2+bh+c]\\
&= 3ax_0^2+2bx_0+c
\end{aligned}
$$

← これが $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の点 x_0 における微分係数

江口 潜

2017/12/21

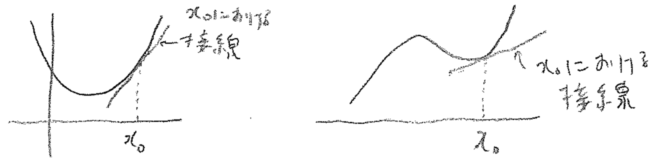
ということで

$y=ax^2+bx+c$ の点 x_0 における微係数は（x_0 がどこであれ、幸いにあり、それは）$2ax_0+b$

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ の点 x_0 における 〃 〃 〃 $3ax_0^2+2bx_0+c$

微係数の意味

$y=f(x)$ の、点 x_0 における（接線の）傾き



すると

「x の値が x_0 のとき、$y=ax^2+bx+c$ の（接線の）傾きは $2ax_0+b$

x_1 〃 〃 〃 $2ax_1+b$

x_2 〃 〃 〃 $2ax_2+b$

⋮ ⋮」

という1つの関数が作れる（生まれる、というべきか）。この関数は

「x の値が○○のとき、関数 $y=f(x)$ の傾きは△□ですよ」という「x の値に対して $f(x)$ の傾きを教えてくれる関数」

ということになる。（それを関数 $y=f(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ の、導関数（どうかんすう）という。（通常 $y=f'(x)$、と書くが、まれに $\frac{dy}{dx}$ と書くこともあり）

この y は関数 $y=f(x)$ の値

この y はもとの関数 $y=f(x)$ の「傾き」の大きさ

（例）関数 $y=ax^2+bx+c$ の導関数は

$y=2ax+b$

（例）関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ の導関数は

$y=3ax^2+2bx+c$

これを見て分かる通り

$y=x^2 \rightarrow$ 導関数 $y=2x$

$y=2x^2 \rightarrow y=2\cdot(2x)=4x$

$y=3x^2 \rightarrow y=3\times(2x)=6x$

$y=x^3 \rightarrow y=3x^2$

$y=4x^3 \rightarrow y=12x^2$

$y=x \rightarrow y=1$（傾きは常に1）

$y=2x \rightarrow y=2$（傾きは常に2）

$y=1 \rightarrow y=0$（傾きは常にゼロ）

$y=5 \rightarrow y=0$（傾きは常にゼロ）

$y=2x^3+6x^2+2 \rightarrow y=6x^2+12x$

期末試験に必ず出る問題

	導関数
$y=2x^2+3x+4 \rightarrow$	$y'=4x+3$
$y=4x^2+5x+2 \rightarrow$	
$y=3x^3+6x-1 \rightarrow$	
$y=2x+1 \rightarrow$	
$y=60x^2+4 \rightarrow$	