進化ゲーム理論の経済学への応用

大阿久　博[É]

1997年4月

[É]本稿を作成するにあたり，財) 清明会から助成を受けた．記して感謝の意を表したい．

要旨

本稿では生物学の分野で研究・開発され，近年経済学の方にも導入され，ナッシュ均衡の新たな見方を提供する進化ゲーム理論について，その理論の解説と簡単な金融モデルへの応用を示す.

進化ゲーム理論は，進化という観点から，伝統的なゲーム理論で採用されてきたプレーヤーの合理性の仮定を用いることなしに生物進化の分析に威力を発揮してきた．この理論を経済学に応用することで，プレーヤーは(従来のゲーム理論での合理性よりもゆるい)限定された合理性のみを持つという仮定のもとで，ナッシュ均衡が時間とともにどのように進化するのか?，複数のナッシュ均衡のうちどれが実現されやすいか? 等の問題に答えることができる.

進化ゲーム理論はすでに制度分析等に応用され，いくつかの新たな結果を提示しているが，今後様々な分野での応用が期待される理論であろうと思われる.

Keywords：進化的安定戦略(ESS)，レプリケーター・ダイナミックス，ベストレスポンス・ダイナミックス，限定合理性.

1　序

現在のゲーム理論で中心になっている解概念はナッシュ均衡である．それは，“各プレーヤーは（相手のプレーヤーが取る戦略についての）の予想を基に，最適な行動を取る”ということを表現している概念である．この概念はどう解釈したら良いのか？または，どのような場合にうまく機能するのであろうか？

これについては次のように主に三つの見方がある[1]．

1. **エダクティヴ** (eductive) **な解釈**：これはプレーヤーがゲームの構造を熟知しており，かつそれが common knowledge になっているという見方である．しかし，ゲームの構造が common knowledge になっているということは，ナッシュ均衡がエダクティヴな方法で達成されるための，必要条件でも十分条件でもない[2]．

2. **自己拘束的な合意** (self–enforcing agreement) **的な解釈**：これはゲームの始まる前にプレーヤー同士の話し合いがもたれて，そこで決まった約束を，各自が自発的に守る，このような自己拘束的な合意を表明しているのがナッシュ均衡であるという解釈である．

3. **エヴォルティヴ** (evolutive)（あるいは，naive）**な解釈**：この解釈はプレーヤーが情報を得るにつれ，より良い戦略を試行錯誤で探っていくという見方である．ナッシュ均衡はこういったある種の調整過程の定常点とみなすことができる．こうした見方にも二つの方法が知られている．一つは「学習 (learning)」によるもの，もう一つは「淘汰・突然変異」によるものである．学習 (learning) とは，相手プレーヤーの取る戦略がわかれば，自分の最適戦略が何であるのかを計算する能力は持っているが，相手がどういう戦略を取ってくるかについての予想は，過去の経験から学ぶというものである．一方，社会の経済活動においては，各プレーヤーは，従来のゲーム理論で仮定される合理性に照らすと必ずしも最適な戦略は取っていないが，社会に存在する様々な戦略の中で，利得の低いものは調整の過程で徐々に淘汰されていくであろうし，またまったく新たな戦略を試みるプレーヤーも出現してくるであろう．この様な過程は，結局ナッシュ均衡に至るであろうというのが「淘汰・突然変異」によるアプローチである．このアプローチを採用したゲーム理論が『進化ゲーム理論』である．

以下では，この進化ゲーム理論の基礎理論とその簡単な応用について述べる．

2　進化的安定戦略 (ESS)

まず，今後対象としていくゲームの構造を示す．

2.1　進化的安定戦略 (ESS)

定義 2.1　• $I = \{1, 2\}$：プレーヤーの集合，

• $S_i = \{1, 2, \cdots, m_i\}$(ただし，$i = 1, 2$):プレーヤー i の純粋戦略集合，

• A:プレーヤー 1 の利得行列，A':プレーヤー 2 の利得行列

とする．

このとき $G = (S_1, S_2, A, A')$ を bimatrix **ゲーム**という．

さらに，すべての $(s_1, s_2) \in S$ に対して，$S_1 = S_2$；$A(s_1, s_2) = A'(s_2, s_1)$ が成り立つとき**対称** bimatrix **ゲーム** (symmetric bimatrix game) という．□

[1] 神取 [19].

[2] ゲームの構造が common knowledge になっておらず，ナッシュ均衡がエダクティヴな方法で達成される例として‘囚人ジレンマ’がある．また，逆にゲームの構造は common knowledge であるが，ナッシュ均衡がエダクティヴな方法で達成されない例として，ナッシュ均衡が複数存在するゲームがある．

以下，この対称bimatrixゲームについて考える．純粋戦略集合を $S_1 = S_2 = K = \{1, 2, \cdots, k\}$ とし，これに関する混合戦略集合を $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i \in K} x_i = 1\}$ とする．また二人のプレーヤーの混合戦略の組の集合を $\Theta = \Delta^2$ とする．（相手の）戦略 $y \in \Delta$ に対して，戦略 $x \in \Delta$ を取ったときの利得を $x \cdot Ay = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j = u(x, y) \in \mathbb{R}$ とする．（相手の）戦略 $y \in \Delta$ に対する最適反応戦略の集合を $BR(y) = \{x \in \Delta | u(x, y) \geq u(x', y) ;\ \forall x' \in \Delta\} \subset \Delta$ とする[3]．

今，無限の個体の集団で各個体が戦略 x か y を取り，ランダムに対戦を繰り返している状況を考える．ただし，この集団における戦略 y を取る個体群の割合は $\varepsilon \in (0, 1)$ であるとする．（ここで y をミュータント戦略と呼び，対して x をincumbent 戦略と呼ぶことにする．）

さて，以上のような設定の下では各プレーヤーは，確率 ε でミュータント戦略を取る相手と，確率 $1 - \varepsilon$ でincumbent戦略を取る相手と対戦することとなる．よってこのゲームでの相手は混合戦略 $w = \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x \in \Delta$ を取るプレーヤーとみなすことができる．incumbent戦略を取るプレーヤーの利得は $u(x, w)$，ミュータント戦略を取るプレーヤーの利得は $u(y, w)$ となる．

定義 2.2　すべての $y \neq x$ に対して，ある適当な $\bar{\varepsilon}_y \in (0, 1)$ が存在して，$\forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_y)$ について[4]，

$$u[x, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] > u[y, \varepsilon y + (1 - \varepsilon)x] \qquad (1)$$

を満たす場合，戦略 $x \in \Delta$ を**進化的安定戦略**(ESS)という．進化的安定戦略の集合を $\Delta^{ESS}\ (\subset \Delta)$ と記す．□

ESSは少数のミュータントの浸入に対して，集団の状態が安定であるということである．(1)はincumbent戦略を取るプレーヤーの利得の方が，ミュータントの利得よりも厳密に高いことを表わしており，戦略 x を取る集団に，戦略 y を取るミュータントは侵入できないということである．[5]．

補題 2.1　すべてのESSは自分自身に対する最適反応である．すなわち，$x \in \Delta^{ESS}$ のとき，$u[x, x] \geq u[y, x]\quad (\forall y \in \Delta)$ である．■

(1)は次のように書ける．

$$(1 - \varepsilon)\{u[x, x] - u[y, x]\} + \varepsilon\{u[x, y] - u[y, y]\} > 0$$

これから，$x \in \Delta$ が進化的に安定であるための必要十分条件は次の(2)，(3)が成り立つことである．

$$u[x, x] \geq u[y, x]; \quad \forall y \qquad (2)$$

$$u[x, x] = u[y, x] \Rightarrow u[x, y] > u[y, y]; \quad \forall y \neq x \qquad (3)$$

ここで(2)はナッシュ均衡の定義にほかならない．(3)よりESSの概念がナッシュ均衡の精緻化になっていることを示している[6]．

定理 2.2　(Bishop–Cannings(1978))[7]

もしESSである混合戦略 x が純粋戦略 $s_1, s_2, \cdots$を 0 でない確率で取るのならば，

$$u[s_1, x] = u[s_2, x] = u[s_3, x] = \cdots = u[x, x]$$

が成立する．■

---

[3] $x^* \in BR(y^*)$; $y^* \in BR(x^*)$ ならば(x^*, y^*) はナッシュ均衡である．ここで，もし $x^* = y^*$ であるならば (x^*, y^*) を**対称ナッシュ均衡**(symmetric Nash equilibrium)という．全ての対称ゲームは少なくとも一つの対称ナッシュ均衡を持つ．

[4] これは ε が十分小さいということを表わしていると解釈すればよい．

[5] 利得が各戦略を取る種族の残すことのできる子孫の数と解釈すると，(1)はミュータントはいずれ死滅することを意味する．

[6] (2)は敵がESSを取っているのであれば，自分がESS以外の戦略を取ると不利になる事を意味し，(3)は敵がESSを取っており自分がESS以外の戦略 q を取っても利得は同じであるが，もし敵が戦略 q を取ってきた場合，自分はESSを取った方が得であるという事を意味している．

[7] 証明はJ.M.Smith [31]を見よ．

例 2.1　次のmatrixで表わされるタカ–ハトゲーム[8] を考える．

	H	D
H	$\frac{1}{2}(V - C), \frac{1}{2}(V - C)$	$V, 0$
D	$0, V$	$\frac{V}{2}, \frac{V}{2}$

このゲームにおいて，明らかに D はESSではない．$u[H; D] > u[D; D]$ であり，(2) に反するからである（つまり対称ナッシュ均衡でさえない）．

- $V > C$ のとき H はESSである．
- $V < C$ のとき H も D もESSにならない．この場合は定理2.2を使うと，混合戦略ESS が存在すれば，それは $u[H; x] = u[D; x]$ を満たす $x = (x_1; 1 - x_1)$ (ここで H を取る確率を x_1 とする) であるということになる．したがって，

$$u[H; x] = x_1 u[H; H] + (1 - x_1) u[H; D] = u[D; x] = x_1 u[D; H] + (1 - x_1) u[D; D]$$

より $x_1 = \frac{V}{C}$ であり，$x = (\frac{V}{C}; 1 - \frac{V}{C})$ が求められ，これが確かに混合戦略ESSであることは容易に確認できる．

注意 2.1　一般に，利得行列のある（縦の）一列を見たとき，その列の最大値となっているものが対角成分であれば，それに対応する純粋戦略はESSである．例えば利得行列が

	H	D	R
H	-1	2	-1
D	0	1	0.9
R	-1	1.1	1

であるゲームの場合，R がESSになる[9]．

一般的なゲームについてはESSは必ず存在するとは限らないが，純粋戦略がふたつのケースではつぎが成り立つ．

定理 2.3　二つの純粋戦略からなるゲームにおける利得行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

で $a_{11} \neq a_{21}$; $a_{12} \neq a_{22}$ であるならば，常にESSが存在する[10]．□

定理 2.4　$x \in \Delta$ がESSとなるための必要十分条件は

$$u[x; y] > u[y; y]$$

が Δ の x のある近傍における全ての $y \neq x$ について成り立つことである[11]．□

---

[8] このゲームの生物学的意味はJ.M.Smith [31]を見よ．

[9] J.M.Smith [31] 参照．またこの場合，$x = \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}D$ もESSとなる．

[10] 証明はJ.M.Smith [31].p199，あるいはvan Damme [35].p219参照．

[11] 証明はHofbauer and Sigmund [17]p141–142参照．

注意 2.2　$x \in \mathrm{int}\Delta$ が進化的安定ならば，別のESSは存在しない[12]．また，ESSの存在しないゲームや，複数のESS（この場合は全てのESSは $\mathrm{bd}\Delta$ にあることになる）を持つゲームもあり得る．また，ESSが存在する場合，その個数については次が知られている．

定理 2.5　ESSは存在しても高々有限個である[13]．□

以上のような対称二人ゲームを越えて，より一般のゲームを考えるとなると，とたんにESSの存在は危うくなってくる．そこで，ESSの概念を若干弱めたものを考える必要が生じる．すなわち，ESSように，すべてのミュータント戦略がincumbent戦略より少ない利得しか得られないという状況ではなく，いかなるミュータント戦略もincumbent戦略より高い利得を上げられない — つまり，(1) が不等号 $>$ ではなく $\geq$ で成立する — 場合である．

定義 2.3　対称二人ゲームにおいて，すべての $y \in \Delta$ に対して，ある適当な $\bar{\epsilon}_y \in (0,1)$ が存在して，$\forall \epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_y)$ について，

$$u[x; \epsilon y + (1-\epsilon)x] \geq u[y; \epsilon y + (1-\epsilon)x] \tag{4}$$

が成り立つとき，$x \in \Delta$ をneutrally stable strategy(NSS) という．neutrally stable strategyの集合を Δ^{NSS} と記す．□

定義より，$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{NSS}$ $(\subset \Delta^{NE})$ である[14]．ESSのときと同様，$x \in \Delta$ がNSSであるとは次のようにも表わせる．

$$u[x;x] \geq u[y;x]; \quad \forall y \tag{5}$$

$$u[x;x] = u[y;x] \Rightarrow u[x;y] \geq u[y;y]; \quad \forall y \neq x \tag{6}$$

ESSはミュータントの戦略については何の制限も設けていない．しかし，経済においては，ミュータントは少数のプレーヤーの試行錯誤あるいは実験によるものであると解釈できる[15]ので，Swinkels [32] はある種の合理性を持つミュータント戦略（equilibrium entrants と呼ぶ）のみに対する頑健性が必要であることを提示した．

定義 2.4　incumbent戦略が $x \in \Delta$，ミュータント戦略が $y \in \Delta$ であり，ミュータントのシェアが ϵ であるとき，混合戦略は $w = \epsilon y + (1-\epsilon)x \in \Delta$ となる．y が w に対するベストレスポンスになっているとき，すなわち，$y \in BR(\epsilon y + (1-\epsilon)x)$ のときequilibrium entrant という．□

定義 2.5　ある $\bar{\epsilon} \in (0,1)$ が存在し，すべての $y \neq x$ とすべての $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon})$ に対して，次の(7)が成り立つとき，$x \in \Delta$ はrobust against equilibrium entrants(REE) という．

$$y \notin BR(\epsilon y + (1-\epsilon)x). \tag{7}$$

□

命題 2.6　$\Delta^{ESS} \subset \Delta^{REE} \subset \Delta^{NE}$ が成り立つ．□

---

[12] Hofbauer and Sigmund [17]p142参照．
[13] van Damme [35] 参照．
[14] Δ^{NE} は対称ナッシュ均衡の集合を表わす．
[15] 青木・奥野 [2] 参照．

2.2 進化的安定な戦略の集合

定義 2.6 **X ö Å**^NE が非空，閉であり，すべての **x 2 X** に対してある近傍 **U** が存在し，すべての **y 2 U \ BR(x)** について **u[x; y] ï u[y; y]** が成り立ち，**y 2 X** のとき厳密な不等式が成り立つ場合，この **X ö Å**^NE をevolutionary stable(ES)**集合**という．~

x 2 Å はES集合に入り込むことはできても，そこから出ていくことはできない[16].

また，すべてのES集合は，それ自身がES集合である閉・連結な互いに疎な集合の有限個の合併集合である．一般にはES集合の存在は保証されないが，二重対称二人ゲーム**(doubly symmetric two{player game)**[17] は必ず少なくとも一つのES集合を持つ[18]．

前節のREEに対するset{valuedバージョンは次で与えられる[19]．

定義 2.7 **X ö Å** が次を満たす最小な集合であるときequilibrium evolutionarily stable(EES)という．

1. **X** は **Å**^NE の非空かつ閉部分集合であり，

2. ある **'ñ2 (0; 1)** が存在して，**8x 2 X**，**8y 2 Å**，**8" 2 (0; 'ñ)**，**y 2 BR("y + (1 Ä ")x)** であるならば，**"y + (1 Ä ")x 2 X** である．~

上の定義は，**EES**集合 **X** は[20]，いかなる小さな**equilibrium entrants**の浸入に対しても戦略分布の構成は **X** の外に出さないような対称ナッシュ均衡戦略の最少の部分集合である，ということを示している．

注意 2.3 非協力ゲームの均衡概念とESSの関連については，

1. もし戦略 **x** がESSであれば，**(X; X)** はperfect均衡である．

2. もし戦略 **x** がESSであれば，**(X; X)** はproper均衡である．

しかしながらこの逆はいえない[21]．

2.3 対称展開型二人ゲーム

今までは，いわゆる標準型ゲームについて考察してきたが，この節では展開型ゲームについて考察する[22]．

まず，展開型（二人）ゲームを **Ä = (K; P; U; C; p; h**$_1$**; h**$_2$**)** とする．ここで，

- **è K**:有限のゲーム樹の節の集合を表わす．また，終節の集合を **Z**，終節以外の節の集合を **X**，i.e. **X = K n Z**，とする．

- **è P = (P**$_0$**; P**$_1$**; P**$_2$**)**:プレーヤー分割を表わす．添字の **0; 1; 2** はそれぞれ自然プレーヤー，第**1**プレーヤー，第**2**プレーヤーを表わす．

---

[16] この事は命題 3.5 に示されている．

[17] 対称二人ゲームの利得行列 A が A^T = A のとき，このゲームを**二重対称二人ゲーム**(doubly symmetric two{player game)という．

[18] Weibull [37].p53参照．

[19] Swinkels [32]参照．

[20] X が一点からなる集合の場合はEESはREEと一致することになる．

[21] van{Damme [35]参照．

[22] Cressman [7]，Selten [29]参照．

- U:情報分割を表わす．U の部分集合 $u \in U$ を情報集合という．また，P_i の全ての情報集合を U_i と記す．
- C:選択分割を表わす．すべての $u \in U$ について，$x \in u$ における選択の集合を C_u とする．また，P_i におけるすべての C_u の合併集合を C_i とする．
- p:初期確率を表わす．
- $h_i \;\; (i = 1, 2)$:プレーヤーの利得関数を表わす．

とする[23]．さらにここでは，完全記憶の仮定を導入する[24]．

Cressman [7]，Selten [29] に基づき対称展開型二人ゲームを次のように定義する．

定義 2.8　次を満たすような $f : C \xrightarrow{\text{onto}} C$ が存在するとき（この f をsymmetryという），(Γ, f) を**対称展開型二人ゲーム**(symmetric extensive two–person game) という．

1. $c \in C_0 \Rightarrow f(c) \in C_0, \;\; p(f(c)) = p(c)$.
2. $c \in C_1 \Rightarrow f(c) \in C_2$.
3. $c \in C$ に対して $f(f(c)) = c$.
4. $u \in U$ に対して，$\hat{u} \in U$ が存在し，u の全ての c について $f(c)$ が $\hat{u}$ の選択になる．$f(u)$ によって，この $\hat{u}$ を表わす．
5. すべての $z \in Z$ に対して $z' \in Z$ が存在し，$f(C(z)) = C(z')$ である．ここで，$C(z)$ は始節から終節 z へ至る選択の集合であり，$f(C(z))$ は $c \in C(z)$ の $f(c)$ の集合である．$f(z)$ によって，この z' を表わす．
6. $h_1(f(z)) = h_2(z)$ かつ $h_2(f(z)) = h_1(z)$ である．□

f は上記の性質4より，二人のプレーヤーの情報集合間の対応として特定化できる．この事を次の例2.2の図.1のように“ $\leftrightarrow$ ”で表わす．

例 2.2　二人のプレーヤー1，2のうちどちらかが土地を所有しているものとする（土地の所有者をowner と呼ぶ）．その土地にもう一方の土地を持っていないプレーヤー（intruder と呼ぶ）が浸入し，次のmatrix で表わされるようなゲームを行うとする．

	e	d
e	-4,-4	8,0
d	0,8	4,4

ここで自然プレーヤーが等しい確率でどちらか一方のプレーヤーをowner に指名し，そのowner の土地をめぐって上記のmatrix ゲームが行われるとする．

これを展開型で表現すると次のようになる[25]．

[23] これらの詳細については，Eichberger [10] を参照せよ．

[24] 完全記憶についても Eichberger [10] を参照せよ．

[25] これは生物学で ouner–intruder ゲームと呼ばれるものである．上記の matrix ゲームは展開型にすると二つの表現が可能であるが，その二つを自然プレーヤーの選択により結び付けたのが図.1である．左側のサブゲームがプレーヤー1がowner の場合，右側のサブゲームがプレーヤー2がowner の場合である．

《図.1 insert about here》

この図で，$u_0; u_1; u_2$ はそれぞれ自然，1，2 プレーヤーの情報集合を表わし（右肩についた 0 はそのプレーヤーが intruder であることを示している），$e_i; d_i$ はプレーヤー i の選択 e あるいは d を表わす．また，自然プレーヤーがプレーヤー 1 を owner に選ぶ選択を n_1，プレーヤー 2 を選ぶ場合を n_2 とする．

さて，f を次のようにとる．

$$f(n_1) = n_2;\quad f(n_2) = n_1;$$

$$f(e_1) = e_2;\quad f(e_2) = e_1;$$

$$f(d_1) = d_2;\quad f(d_2) = d_1;$$

$$f(e_1^0) = e_2^0;\quad f(e_2^0) = e_1^0;$$

$$f(d_1^0) = d_2^0;\quad f(d_2^0) = d_1^0:$$

このとき，定義 2.8 の f の条件が満たされることがわかる[26]．この場合には，

$$u_1 \ \$ \ u_2;\quad u_2^0 \ \$ \ u_1^0$$

という対応になる (図.1 をみよ).

上のゲームの symmetry f は次のようにも取ることができる．

$$f(n_1) = n_1;\quad f(n_2) = n_2;$$

$$f(e_1) = e_2^0;\quad f(e_2) = e_1^0;$$

$$f(d_1) = d_2^0;\quad f(d_2) = d_1^0;$$

$$f(e_1^0) = e_2;\quad f(e_2^0) = e_1;$$

$$f(d_1^0) = d_2;\quad f(d_2^0) = d_1:$$

この場合には，

$$u_1 \ \$ \ u_2^0;\quad u_2 \ \$ \ u_1^0$$

という対応になる．

プレーヤー 1 の純粋戦略 s を全ての $u \ 2 \ U_1$ に一つの選択を対応させる関数とする．このとき，もし s が $u \ 2 \ U_1$ において c を対応させるのならば，$f(s)$ は $f(u) \ 2 \ U_2$ において $f(c)$ を対応させるプレーヤー 2 の純粋戦略である．例えば，例 2.2 で，プレーヤー 1 が owner のとき e_1，intruder のとき d_1^0 を取る純粋戦略を $e_1 d_1^0$ とかくと，プレーヤー 2 の純粋戦略は $f(e_1 d_1^0) = e_2 d_2^0$ である．

S をプレーヤー 1 の全ての純粋戦略からなる集合（m 個の要素よりなる）とする．プレーヤー 1，2 の純粋戦略の組 $(s; f(s))$ と初期確率 p が与えられれば，プレーヤー 1 の期待利得 $E(s; f(s))$ を計算することができる．再び，例 2.2 では，$E(e_1 d_1^0; f(e_1 d_1^0)) = \frac{1}{2} h_1(z_2) + \frac{1}{2} h_1(z_6) = 4$ となる．

よって，対称展開型二人ゲーム $(\text{Ä}; f)$ の標準型は $m \, \text{Ç} \, m$ の利得行列で表現できる．例 2.2 では，プレーヤー 1 は四つの純粋戦略 $e_1 e_1^0; e_1 d_1^0; d_1 e_1^0; d_1 d_1^0$ を持ち，4 Ç 4 の利得行列

[26] 条件の 1 | 4 は自明．5 についても，例えば，$C(z_2) = fn_1; e_1; d_2^0 g$ について $f(C(z_2)) = fn_2; e_2; d_1^0 g = z_6$ となる．またこのとき，$h_1(f(z_2)) = h_1(z_6) = 0 = h_2(z_2)$;　$h_2(f(z_2)) = h_2(z_6) = 8 = h_1(z_2)$ である．

$$
A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 & 8 \\ -2 & 4 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}
$$

で表現できる．ここで**対称純粋戦略ナッシュ均衡** s^* は，すべての $s \in S$ に対して，$E(s^*, s^*) \geq E(s, s^*)$ を満たすものである．$e_1 d_1'$，$d_1 e_1'$ の二つが例 2.2 における均衡である．

混合戦略 q は $(m-1)$–次元単体

$$
\Delta_{(m-1)} = \left\{ q = (q_1, q_2, \ldots, q_m) \mid \sum_{k=1}^{m} q_k = 1, \ q_k \geq 0 \right\}
$$

の要素である．混合戦略 $q \in \Delta_{(m-1)}$ を取ったときの q' に対する期待利得は，$q \cdot Aq'$ である．ここで，A は上記で述べた $m \times m$–利得行列である．**対称混合戦略ナッシュ均衡** q^* は，すべての $q \in \Delta_{(m-1)}$ に対して，$q^* \cdot Aq^* \geq q \cdot Aq^*$ を満たすものである．例 2.2 では，$(0, 1, 0, 0)$；$(0, 0, 1, 0)$；$(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$；$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ の四つが対称混合戦略ナッシュ均衡である．

利得行列 A を使って，対称展開型二人ゲームの ESS，ES 集合も今までと同様に定義できる．

定義 2.9 [27]

1. 対称混合戦略ナッシュ均衡の集合 L が，ある q_0 に対して $q_0 \cdot Aq_0 = q \cdot Aq_0$ であり，$q \notin L$ に対して $q_0 \cdot Aq > q \cdot Aq$ となるとき，L を**進化的安定集合** (evolutionarily stable set)(ES **集合**) という．

2. 対称混合戦略ナッシュ均衡 q_0 が**進化的安定戦略** (ESS) とは，$\{q_0\}$ が一つの ES 集合になっているときである．□

3 ダイナミックス

3.1 レプリケータ・ダイナミックス

進化ゲーム理論における進化的安定 (ESS) の概念は暗黙の内に力学系的な考え方を用いており，ある仮定の下で，微分方程式でモデル化できる．この微分方程式は一般にレプリケータ・ダイナミックス (replicator dynamics)[28] と呼ばれる．

各プレーヤーが純粋戦略を取る場合を考える．

多数の主体からなる集団が純粋戦略 $i \in K = \{1, 2, \ldots, k\}$ を取るとする．ある時点 t において純粋戦略 i を取る個体の数を $p_i(t) \geq 0$ とする．このとき総個体数は，$p(t) = \sum_{i \in K} p_i(t)$ となる．ここで純粋戦略 i を取る個体の総個体数に対する比率を $x_i(t) = \frac{p_i(t)}{p(t)}$ とすると，この集団の状態は $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))$ と表わすことができる．このとき $x(t) \in \Delta$ であり，集団の状態は形式的に混合戦略と同一視することができる．

集団の状態が $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_k(t))$ のとき，ランダムな対戦において，純粋戦略 i を取るプレーヤーの期待利得は $u[e^i, x]$ で表わすことができる[29]．よって集団全体での期待利得は，

$$
u[x, x] = \sum_{i \in K} x_i u[e^i, x]
$$

[27] Cressman [7].
[28] Weibull [37]，Hofbauer and Sigmund [17] 等参照.
[29] ここで e^i は純粋戦略 i に確率 1 を与える混合戦略を表わす.

となる．すなわち，混合戦略 x を取る主体が，同じ戦略 x を取る相手に対したときの利得である．ここで純粋戦略 i を取る個体数の増加率 $\frac{dx}{dt}/x_i$ は自分の期待利得 $u[e^i;x]$ と集団全体での期待利得 $u[x;x]$ の差で表わせるとすると，$\frac{dx}{dt}/x_i = u[e^i;x] - u[x;x]$，すなわち

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\{u[e^i;x] - u[x;x]\} \tag{8}$$

という微分方程式を得る．

定義 3.1　式(8) を**純粋戦略レプリケータ・ダイナミックス**(replicator dynamics) という[30]．□

式(8) から直ちにわかるように，純粋戦略 i を取る個体の総個体数に対するシェアは，その期待利得が全体の平均利得（集団全体での期待利得）を上回るとき増加する．

このレプリケータ・ダイナミックスは次の性質を持つことが知られている．

- (8) は任意の初期状態 $x_0 \in \mathbf{R}^k$ に対して，一意的な解を持つ[31]．
- 単体 $\Delta \in \mathbf{R}^k$ は(8) に対して不変である[32]．

定義 3.2　$\frac{dx}{dt} = f(x)$ の不動点 x^* について，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある δ が存在し，$\|x(0) - x^*\| < \delta$ ならば，すべての $t > 0$ に対して $\|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ であるとき，x^* は**リャプノフ**(Lyapunov stable) であると呼ばれる．□

定義 3.3　微分方程式 $\frac{dx}{dt} = f(x)$ の不動点 x^* について，

1. x^* がリャプノフ安定であり，
2. $\lim_{t\to\infty} x(t) = x^*$ をも満たすように δ がとれる．

このとき x^* は**漸近安定**(asymptotically stable) であると呼ばれる．□

まず，ナッシュ均衡と安定な均衡点の間には，次のような関係がある．

定理 3.1　もし x^* が安定な均衡点であるならば，$(x^*;x^*)$ はナッシュ均衡である．しかし，この逆は成り立たない[33]．

また，perfect ナッシュ均衡であるからといって，安定均衡であるとはいえないし，この逆もいえない．しかしながら，漸近安定な場合には，それは perfect 均衡になる (この場合もこの逆命題は成り立たない)．

(8) の漸近安定な点と ESS には次の関係がある[34]．

定理 3.2　ESS は純粋戦略レプリケータ・ダイナミックス(8) の漸近安定な点である．しかしながら，この逆は成り立たない[35]．□

---

[30] 応用例では，簡単化のために，$u[\cdot]$ が線形の場合を考えることが多い．すなわちプレーヤーの利得関数が行列 $A = (a_{ij})$ $(k \times k$ 行列) で表わされ，このとき $u[e^i;x] = e^i \cdot Ax$，$u[x;x] = x \cdot Ax$ であるから，(8) は

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(e^i \cdot Ax - x \cdot Ax) \tag{9}$$

となる．

[31] Picard–Lindelöf の定理からわかる．詳しくは Weibull [37],Chapter 6 参照．

[32] これは Δ 内のいかなる初期状態から出発した軌道も Δ 内に留まるということである．

[33] van–Damme [35] 参照．

[34] Taylor and Jonker [33]，Hofbauer and Sigmund [17] 等参照．

[35] もし各プレーヤーが混合戦略を取れるならば，定理 3.2 の逆も成り立つことが知られている．一般に混合戦略は非可算無限個存在し，このときどのように(8) を構成するかという問題が生じる．これについては，Hines [15]，Zeeman [39] を参照せよ．また各プレーヤーが有限個の混合戦略のみをプレーする場合については Weibull [37] を参照せよ．

もしゲームが二重対称であるならば，ESSと漸近安定性は一致する．すなわち，二重対称ゲームにおいては，

$$x \in \Delta^{ESS} \iff x \in \Delta \text{ は漸近安定}$$

注意2.2より，$x \in \Delta^{ESS}$ が $x \in \mathrm{int}\Delta$ であるなら一意的である．この事より次が成り立つ．

系 3.3 $x \in \Delta^{ESS} \cap \mathrm{int}\Delta$ ならば，すべての $x_0 \in \mathrm{int}\Delta$ に対して

$$\varphi(t; x_0) \longrightarrow x \quad (t \to \infty)$$

である．□

ESSよりも弱い概念であるNSSについては安定性も弱くなる．すなわち，

命題 3.4 すべての $x \in \Delta^{NSS}$ は純粋戦略レプリケータ・ダイナミックス(8)のリャプノフ安定な点である．□

また，前節のES集合について次の命題が成り立つ．

命題 3.5 ES集合は，(8)のもと，漸近安定である．□

3.2 パーマネンス

前節においては，ESSの漸近安定性などについてみてきたが，一般に，レプリケーター・ダイナミックスに対して，その解の漸近的な挙動を正確に求められないケースも多い．

そんな場合でも，はじめの戦略分布に存在していた，ある戦略を取る主体がいなくなってしまうのかどうか，が問題になることもあろう．ここではこのような問題を取り扱う際の一つの数学的概念を与える．

定義 3.4 Δ 上で定義された力学系は $x_i(0) > 0\ ;\ (i = 1, 2, \cdots, k)$ であるならば，ある $\varepsilon > 0$ が存在し，

$$\liminf_{t \to \infty} x_i(t) > \varepsilon \quad (\forall i = 1, 2, \cdots, k)$$

となる場合**パーマネンス**(permanence)という．

ここで ε は初期値 $x_i(0)$ に依存しない．また，この定義はすべて $(i = 1, 2, \cdots, k)$ の戦略が存在するならば，どの戦略を取る主体も将来的に必ず存在するということである．すなわち，境界 $\mathrm{bd}\Delta$ がリペラーになるということを示している．したがって，(9)式がパーマネンスであれば，各戦略を取る主体がどれも絶滅することなく，共存する状態がずっと続くことになる．

定理 3.6 (9)がパーマネンスであるならば，uniqueな不動点 $x^* \in \mathrm{int}\Delta$ が存在し，すべての $x(0) \in \mathrm{int}\Delta$ に対して，

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = x^*$$

が成り立つ．

上の定理は系がパーマネンスであるための必要条件を示している．式は，戦略 i を取るプレーヤーの集団におけるシェアは時間とともに変化するが，(時間について)平均すれば x_i^* になるということを示している．

次にパーマネンスになるための十分条件をみてみよう．

定理 3.7　(9) において，すべての不動点 **y**^{É} **2 bdÅ** に対して，

$$\mathbf{x}\,Å\mathbf{A}\mathbf{y}^{É} > \mathbf{y}^{É}\,Å\mathbf{A}\mathbf{y}^{É}$$

が成り立つような **x 2 int é** が存在するとき，(9) はパーマネンスである．

この定理を満たすような **x** の集合は，int **Å** の凸閉部分集合である[36]．

3.3　ベストレスポンス・ダイナミックス

さて，経済学において進化ゲーム理論はどのように使われるであろうか．前章までの議論の通り，進化ゲームでは多数のプレーヤーが存在するような状況を一つの社会と考え，毎期そのプレーヤーの集団の中からランダムに出会ったもの同士が段階ゲームをプレーし，与えられた利得関数に基づき利得を得る．これが離散，あるいは連続な時間を通じて繰り返される．この一連の流れにおいて，各プレーヤーは特定の相手とのプレーは記憶せず，社会全体でどういう戦略を取る人がどのくらいの割合存在するかを知り，今期の戦略を決定する．

以上のようなゲームを行うプレーヤーは完全にではないが，一部の自分以外のプレーヤーが取った戦略，それによる利得を観察できるというのが一般的であろう．この場合，このプレーヤーは，自分より高い利得をあげているプレーヤーの戦略をまねるようになるだろう．この結果，社会全体では，最も高い利得をあげる戦略を取るプレーヤーが増加していくことになる．

しかしながら，全てのプレーヤーが一度に最適な戦略を採用するようになるというのは現実的ではない．この様な考え方は次の限定合理性の仮定に結び付く．

仮定 3.1　**(限定合理性)**
限定合理性 (bounded rationality) は次のふたつの要素からなる．

1. 全てのプレーヤーが社会の状態に対して即座に反応できるわけではない（**慣性** (inertia)）[37]．
2. 戦略を変更できるプレーヤーは現在の戦略分布を所与として，それに対する最適な戦略に戦略を変更する（**近視眼** (myopia)）[38]．
3. 既存の戦略分布を撹乱する要因が存在する（**突然変異** (mutation hypothesis)）[39]．

この最後の突然変異についてはモデルにより導入されないこともある．

さて，第 **3.1** 節のレプリケータ・ダイナミックスを経済学に応用しようとする場合，いくつかの問題点が指摘されている[40]．その一つとしてレプリケータ・ダイナミックスは最適反応を表わすダイナミックスではないということがあげられる．すなわち，ある状態のもと，個体群は “平均” 以上の期待利得をもたらすような戦略を取れば個体数を増加させることができ，かならずしも “ベスト” な戦略を取る必要はないのである．

---

[36] Hofbauer and Sigmund [17], 第19章をみよ．

[37] モデルでは，プレーヤーの一部のみが戦略を変更するために，社会全体の戦略分布は徐々に調整されていくことになる．

[38] 自分達が戦略を変更することにより全体の戦略分布が変わり，変更した戦略はもはや最適なものではなくなっているかもしれないが，プレーヤーはこの様なことを考えない（あるいは考えることができない）場合を近視眼的というのである．またこれは，プレーヤーは長期的な戦略選択は行えない，つまり将来のことを予測して行動するほどは合理的ではないということも意味している．しかし，慣性が存在し，戦略を変更できるプレーヤーがほんの一部であるときには，近視眼的な行動も十分に合理的であろう．

[39] このことはプレーヤーの一部が毎期入れ代わり，ゲームについては何も知らず，ランダムに戦略を選ぶ新たなプレーヤーに取って代わられるかもしれないということを表わしている．突然変異を導入した代表的なものに Kandori, Mailath and Rob [21] がある．

[40] Mailath [24]，van Damme [34] 等参照．

したがって，何か最適性を取り入れたダイナミックスが必要となるが，上記の限定合理性の条件1，2により構成されるダイナミックス ― **ベストレスポンス・ダイナミックス** (best response dynamics) ― を考える．ここでは，Gilboa and Matsui [14]，Matsui [25] により提案されたベストレスポンス・ダイナミックスを考えよう．このダイナミックスにおいては，ある行動の頻度は，それが現在の戦略分布 $p(t)$ に対してベストレスポンスになっているとき，そしてその時にのみ増加すると仮定される．つまり次のようにダイナミックスを定義する[41]．

$$\frac{d^+x(t)}{dt} = h(t) - x(t); \qquad (10)$$
$$h(t) \in BR(x(t)):$$

ここで $\frac{d^+x(t)}{dt}$ は右微分であり，$BR(x(t)) = \prod_i BR_i(x(t))$ であり，$BR_i(x(t))$ は戦略分布 $x(t)$ に対するプレーヤー i の最適反応となる混合戦略の集合である．一般に現在の戦略分布 $x(t)$ に対する最適反応の集合 $BR(x(t))$ は一価（一点）にはならない．よって上の定義では $BR(x(t))$ の中からある一つの要素 $h(t)$ を抜き出すことによりダイナミックスを定義している．

Gilboa and Matsui [14] はこのダイナミックスを使い cyclically stable set(CSS) の概念を提示した．

注意 3. 1　特に Matsui [25] では，$h(t)$ として step function が選択されている．これに対して $BR(x(t))$ から一価の関数を抜き出すのではなく，$BR(x(t))$ をそのまま使ってダイナミックスを定義するという方法も考えられよう．この場合には，ダイナミックスは次のように表される．

$$\frac{d}{dt}x(t) \in BR(x(t)) - x(t); \qquad x(0) = x^0$$

この形の方程式は**多価微分方程式** (differential inclusion) とよばれる．ある設定のもとで $BR(\Delta)$ は u.h.c，凸値かつコンパクト値になり，Aubin,J.P and H.Frankowska [4]，Aubin,J.P and A.Cullina [3] の議論から，この多価微分方程式に解が存在することがわかる．

定義 3. 5　$x^0 \in \Delta$ が x から**直接接近可能** (directly accessible) であるとは，(10) の軌道で，$x(0) = x$，かつある T について $x(T) = x^0$ なるものが存在することをいう．~

定義 3. 6　x^0 が x から**接近可能** (accessible) であるとは，次の三つのうち少なくとも一つを満たす場合である．

1. x^0 は x から直接接近可能である．
2. x^0 に収束する列 $\{x^0_n\}$ が存在し，各 x^0_n が x から直接接近可能である．
3. x^0 が y から直接接近可能で，y は x から直接接近可能である．

~

定義 3. 7　ある非空の集合 C が cyclically stable set (CSS) であるとは，

1. C の各要素は互いに接近可能であり，
2. C に属さないいかなる点も C の点から接近可能ではない

[41] 次の定義は Matsui [25] によるもので，Gilboa and Matsui [14] の定義とは若干異なる．

場合である．~

このCSSは直感的には次のように解釈できる．すなわち，各プレーヤーはよりbetterな戦略をベストレスポンス・ダイナミックスにそって探し求めるが，十分長い時間の後には，全ての選択肢を検討し，他のプレーヤーの行動についてもほとんど完全な知識を得，CSS集合内に入り込む．そして決してそこから離れていくことはないということである[42]．(CSSの"cyclically"はCSSの中を回るというイメージを表わしている．もちろん，cycleよりももっと複雑な軌道も生じ得る.) さらにCSSは，ESSやNSSと違い，常に存在することが知られている[43]．

注意 3. 2　このほかにBrown [5] に始まる åctitious play がある．これについては，Fudenberg and Levine [12] を参照せよ．

3.4　進化ゲームにおけるカオス

レプリケータ・ダイナミックス等の解軌道が，ある均衡点に収束してくれるならば，我々の将来に対する予想は極めてわかりやすものとなる．しかしながら，ある力学系においては，"カオス"という極めて複雑で将来の予測が不可能な軌道を生じるものが存在することが知られている[44]．

さて，均衡の集合の中には，大域的に安定なもの，不安定なものなど様々な性質を持つものが存在するが，そのため複数の均衡がある場合，ある動学的プロセスにおいて，そのいくつかの均衡は到達されないかもしれない．したがって，どのような条件の下で均衡に収束するプロセスが得られるかを研究することは重要である．

以下では，混合戦略は，多数種からなる集団における (純粋戦略を取る) 各種族の集団シェアであると解釈する．

有限の非協力ゲームにおいては，進化の過程 (レプリケータ・ダイナミックス) のもと，安定な (リミット) サイクルが存在することが知られている．またZeeman [38] は，三つの純粋戦略からなる進化ゲームでは，(ある設定のもとでは) カオス現象が生じ得ないことを示した．
しかしながら，四つの純粋戦略がある場合，ストレンジアトラクターが (つまりカオス的軌道) が生じ得ることがSkyrms [30] により示された．

カオスの生じる例

Taylor and Jonker [33] は，三つの純粋戦略がある場合，振動が生じて均衡への収束が起きない場合を指摘した．
次のようなゲームを考える (aはパラメータ)．

	S1	S2	S3
S1	2	1	5
S2	5	a	0
S3	1	4	3

[42] Gilboa and Matsui [14] によるCSSは必ずしもナッシュ均衡になるとは限らない．この点がCSSとEESの主な違いである．
[43] Gilboa and Matsui [14]，Matsui [25] を見よ．
[44] 経済学におけるカオスについては，例えば，西村・矢野 [27]，Lorents [23]，Hommes [18]，Rand [28]，Medio [26]，Day [8] 等を，またカオスについての数学的理論については，Collet and Eckmann [6]，Guckenheimer and Holmes [13]，青木 [1] 等を参照せよ．

1. **a = 1 のとき，混合戦略ナッシュ均衡は漸近安定であるが，ESS ではない．**

2. **a < 3 のとき，混合均衡は漸近安定である．**

3. **a = 3 のとき，混合均衡は安定であるが，漸近安定ではない (閉曲線になる)．**

4. **a > 3 のとき，混合均衡は不安定となり，spiral しながら戦略空間の境界に向かう．**

つまり **a = 3** においては，この力学系は**構造不安定**なのである[45]．
しかしながら，このケースでは **Hopf** 分岐は起こらず，カオス軌道は見られない[46]
これに対して **Skyrms [30]** は，戦略が四つある場合には，ストレンジアトラクター (**Hopf** 分岐を通じてうまれる) が生じ得ることを示した．

例 3.1 Skyrms [30] **の例**
次のようなゲームマトリックスを考える (a はパラメータ)．

	S1	S2	S3	S4
S1	-1	-1	-10	1,000
S2	-1.5	-1	-1	1,000
S3	a	0.5	0	-1,000
S4	0	0	0	0

このゲームでは，**a = 2** のとき，軌道は spiral しながら混合均衡に収束する．**a** が上昇し **2:55** になると，Hopf 分岐により，混合均衡の周りにリミットサイクルが生じる (このリミットサイクルは構造安定であり，もちろん attracting set である)．
さらに **a** の値をあげ，**a = 3:885** になると，周期 **2** のサイクルが生じる．**a = 4:00** にすると，周期 **4** のサイクルが生じる．
a = 5 になると図.2 のようなストレンジアトラクターが出現する．

《図.2 insert about here》

数学的な証明はされてはいないけれども，いずれにせよ，少なくとも四つの戦略を持つ進化ゲームについてのレプリケータ・ダイナミックスは，極めて複雑なふるまい (カオス的) をする軌道を持ち得るのである．

ロトカ{ボルテラ系との関係

n 種の個体群を考え，x_i を第 **i** 種の集団においてのシェア，r_i を増加 (あるいは減少) 率，a_{ij} は第 **j** 種の第 **i** 種に対する影響を表し，その影響が x_i を増加させる影響ならば正，逆ならば負であるとする．このとき一般化ロトカ{ボルテラ系は

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i + \sum_{j=1} a_{ij} x_j \right)$$

[45] これと同様のふるまいをする例として，Weibull [37] の一般化じゃんけんゲームがある．
[46] 詳細は Zeeman [38] 参照．

とかける[47].

ここで $n = 2$，すなわち種が二種類のとき (捕食者{被食者) はサイクルは生じるのであるが，カオス(したがってストレンジアトラクター) は生じない[48].

しかし，$n = 3$ のケースでは，ストレンジアトラクターが (つまりカオス的軌道が) 生じ得ることが知られている[49].

$A = (a_{ij})$ とすると，レプリケータ・ダイナミックスは

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\left(e^i \cdot Ax - x \cdot Ax\right)$$

とかける．このとき，

定理 3.8 **$(n+1)$ 種のレプリケータ・ダイナミックスは，n 種のロトカ{ボルテラ系と同値である．**

が成り立つ[50].

したがって，4 種 (つまり戦略が四つ) の進化ゲームのレプリケータ・ダイナミックでは，カオス的現象が生じる可能性があるのである．

3.5 簡略化した Diamond,D.and P.Dybvig モデルへの応用 (I)

本節では，Diamond{Dybvig [9] モデルを簡略化したものを用いて，銀行取付について考察する．もともとの Diamond{Dybvig モデルでは銀行が取付に遭うということが一つのナッシュ均衡として存在し得ることが示されている．しかしながら，このような銀行の取付が波及し，連鎖倒産におちいるかどうかといった研究はあまり行われていないように思われる．

ここでは Diamond{Dybvig モデルような " 銀行取付の均衡 " があったとしても，預金者のタイプの分布がある条件を満たせば，連鎖的な取付は起こらないことが示される．

モデル

ここでは，前節まで議論してきた進化ゲーム論的に銀行取付を考える．

いま市場に無数の預金者と有限数の銀行が存在するとする．預金者には二つのタイプがあり，一つは期日前に預金を引き出すタイプ（タイプH），もう一つは期日まで預金を引き出さないタイプ（タイプN）とする．各預金者はそれぞれ預金する資金 D を持っているとする．

預金者全体の中でタイプHに属する割合を p，タイプNに属する割合を $1 - p$ とする．銀行はこの割合については知っているが，どの個人がどちらのタイプに属するのかは知らないものとする．

銀行の行動

各銀行はこの預金者の集団の中から二人だけ預金を獲得できるものとする．すなわち銀行は $2D$ の預金をあずかることとなる．各銀行はこの資金を次のようなプロジェクトに投資する．

(1) このプロジェクトが完了すると銀行には $2R$ の収益が入る．

(2) プロジェクト完了前に銀行は資金を回収できるが，回収できる額は $2r$ であるとする．

ここで $R > D;\ D > r > \frac{1}{2}D$ としよう．

---

[47] Hofbauer and Sigmund [17] 参照．またこのとき，他の種に与える影響は線形であると仮定されている．

[48] 種が二種類のときについては，Hofbauer and Sigmund [17],18 章で詳細に議論されている．

[49] これに対して離散時間系では，一次元の場合でさえカオス的軌道が発生する．その数学的メカニズムについては Li and Yorke [22], Collet and Eckmann [6]，青木 [1] 等を見よ．経済学のモデルにおけるカオス的軌道の存在を示した多くの論文は，Li and Yorke [22] による「Li{Yorke の定理」を利用している．

[50] Hofbauer [16]，Hofbauer and Sigmund [17] 参照．

預金者への返済

預金者には前述の通り二つのタイプがいる．

(1) 銀行の獲得した預金者が二人ともタイプHであったとき，銀行は投資資金を回収し，二人にそれぞれ r 返済する．

(2) 銀行の獲得した預金者が一人はタイプH，もう一人がタイプNのとき，やはり銀行は投資資金を回収し，預金を引き出しに来たタイプHには D，タイプNには 2r Ä D 返済する．

(3) 銀行の獲得した預金者が二人ともタイプNの場合は，プロジェクト完了後各々に R 返済する．

以上からこの二人の預金者は次のようなゲームを行っているとみることが出来る．

Matrix《DD》

	引き出す(h)	引き出さない(n)
引き出す(h)	r,r	D,2r-D
引き出さない(n)	2r-D,D	R,R

戦略の組 (h; h) は銀行が獲得した預金者が二人ともタイプHのとき，(h; n) は一方がタイプHでもう一方がタイプNのとき，(n; n) は両者ともタイプNのときである．

上記の matrix DD より，(h; h)，(n; n) の二つの純粋戦略ナッシュ均衡と，“h”に $\frac{R\,\text{Ä}\,D}{R\,\text{A}\,r}$，“n”に $\frac{D\,\text{Ä}\,r}{R\,\text{A}\,r}$ を割り当てた一つの混合戦略ナッシュ均衡が存在することがわかる．このうちでESSとなるのは，(h; h) と (n; n) の二つであり，注意2. 2 を考慮すると三つ目の混合戦略はESS にはならない．

さてタイプHが銀行の預金者になる確率は p であるのでタイプHの個人の期待利得は

$$U_H = pr + (1\ \text{Ä}\ p)D$$

である．同様にタイプNの個人の期待利得は

$$U_N = p(2r\ \text{Ä}\ D) + (1\ \text{Ä}\ p)R$$

である．

これより次の図が得られる．

《図.3 insert about here》

図.3 より $p < \frac{R\,\text{Ä}\,D}{R\,\text{A}\,r}$ ならば“n”がベストレスポンス，$p > \frac{R\,\text{Ä}\,D}{R\,\text{A}\,r}$ ならば“h”がベストレスポンスであることがわかる．

ここでベストレスポンスダイナミックス[51] を考える．すなわちタイプHの割合が時間の関数 p(t) であり，x(t) = (p(t); 1 Ä p(t)) とし，[Å]で“Å”に確率1を与える混合戦略を表わすとすると，

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = [n]\ \text{Ä}\ x(t) < 0 & (p(0) < \frac{R\,\text{Ä}\,D}{R\,\text{A}\,r}) \qquad (1) \\ \frac{dx(t)}{dt} = [h]\ \text{Ä}\ x(t) > 0 & (p(0) > \frac{R\,\text{Ä}\,D}{R\,\text{A}\,r}) \qquad (2) \end{cases}$$

[51] (10) を見よ．

となり，(1) より $p(t) = p(0)e^{-t}$ $(p(0) < \frac{R-D}{R-r})$，(2) より $p(t) = 1 - (1 - p(0))e^{-t}$ $(p(0) > \frac{R-D}{R-r})$ であることがわかる．

銀行システムが安定なケース

(1) では $p(t) \to 0$ すなわちタイプHの割合は減少する（タイプNの方が期待利得が上であることを知り，タイプHの個人がタイプNの行動をまねるようになる）．よってこのときは最終的には (n, n) の均衡が実現されることになる．

進化的 adverse selection

(2) では逆に $p(t) \to 1$ となり (h, h) が実現されることとなり，銀行取付が連鎖的に発生することとなる．

また"h"に $\frac{R-D}{R-r}$，"n"に $\frac{D-r}{R-r}$ を割り当てた混合戦略（すなわち，$p(t) = \frac{R-D}{R-r}$）はベストレスポンス・ダイナミックスの不安定均衡点であることがわかる．これは初期値が $p(0) = \frac{R-D}{R-r}$ のときには，混合戦略 $(\frac{R-D}{R-r}, \frac{D-r}{R-r})$ 自身がベストレスポンスになり，$\frac{dp(t)}{dt} = 0$ となる．このときには，$\forall t$ について預金者の集団の中で，タイプHが $\frac{R-D}{R-r}$，タイプNが $\frac{D-r}{R-r}$ の割合で共存することになる．

Diamond–Dybvig [9] は，一つの銀行が取付に遭うかどうかを検討したもの，すなわち上の matrix で，"(h, h) という戦略の組が一つの均衡となり得る"ことを示しているが，上記の議論では仮に (h, h) が均衡であったとしても，初期点が $0 < p(0) < \frac{R-D}{R-r}$ であれば，連鎖的に取付が起こり続けるということはないということを示している．つまり，いつかは $p(t) = 1$ となり預金を中途解約する預金者はいなくなるのである．もちろん $\frac{R-D}{R-r} < p(0) < 1$ ならば逆の現象が生じる．

さらに，$0 < p(0) < \frac{R-D}{R-r}$ のケースで，このダイナミックスに"中途解約するミュータント"が発生したとしても，それがあまり大勢でなければ（すなわち，$p(t)$ が $\frac{R-D}{R-r}$ を越えるほどでなければ）やはり中途解約する預金者は淘汰されるのである．そして $p(t)$ が $\frac{R-D}{R-r}$ を越えるほどの浸入が遭ったとき，初めて大変なことが起こる!![52]

以上の分析は初期点 $p(0)$ に完全に依存したものであるが，ここで条件を多少変えて，$R > r > D$ の場合を考えてみる．このときには上の matrix で純粋戦略ナッシュ均衡は (n, n) だけとなる（"n"が支配戦略になる）．このときは当然，初期点 $p(0)$ によらずに"n"がベストレスポンスになる．よってベストレスポンスダイナミックスは

$$\frac{dx(t)}{dt} = [n] - p(t) < 0 \quad \forall p(0) \in [0, 1]$$

となり，最終的に (n, n) の均衡が実現されることになる．すなわち，この場合は初期値によらず最終的には銀行取付が起こらない状態に落ち着くこととなるのである．

《図.4 insert about here》

4 確率的進化

4.1 長期均衡

以上の議論では，ダイナミカルシステムにおけるミュータントの浸入は，one–shot の摂動として捉えられてきた．この章ではある確率分布にしたがったミュータントの浸入が連続的に発生するようなケースを

[52] 例えば，1927 年の東京渡辺銀行の取付については次のように解釈できる．つまり，片岡大蔵大臣の失言により，タイプNであった預金者が突然大量にタイプHに変わったため，p が $\frac{R-D}{R-r}$ を越えてしまい取付けにあった．(ただし，これは全預金者におけるタイプの構成が変化したのではなく，東京渡辺銀行がターゲットとしている預金者のタイプの変化が生じたとみるべきであるが.)

また，ミュータントの侵入が連続的に起こるケースの Kandori et al [21] による研究は次の第 4 節をみよ．

考える[53]．この場合，複数均衡や経路依存性が解消され，ある均衡がもっとも起こりやすいという状況になる可能性がある．

いま，プレーヤーは有限(N 人:偶数)であるとする[54]．彼らは時間を通じてランダムに対戦をするゲームを行うとする．ここでは次の二人対称ゲームを考える[55]．

Matrix《KMR》

	s_1	s_2
s_1	a,a	b,c
s_2	c,b	d,d

- 行動は離散時間 $t = 1, 2, \cdots$ で行われる．各プレーヤーは一期間に一度他のプレーヤーと対戦する．
- 期間 t の期首において，各プレーヤーは純粋戦略の集合 $S = (s_1, s_2)$ から戦略を選択する．
- z_t : t 期に戦略 s_1 を選択するプレーヤーの数とする．すなわち，$T = \{1, 2, \cdots\}$，$Z = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ とすると，

$$z_t : T \longrightarrow Z$$

  ここで Z は有限な状態空間である．

- $\pi_i(z)$ を戦略 s_i を取るプレーヤーの期待利潤とすると，

$$\pi_1(z) = \frac{z-1}{N-1}a + \frac{N-z}{N-1}b,$$

$$\pi_2(z) = \frac{z}{N-1}c + \frac{N-z-1}{N-1}d$$

  となる．

- z_t は次の Darwinian 性 (D) を持つ決定論的ダイナミックスで表わされる．

$$z_{t+1} = b(z_t)$$

$$\text{(D)} \quad \mathrm{sign}(b(z) - z) = \mathrm{sign}(\pi_1(z) - \pi_2(z)) \qquad z \neq 0, N$$

  ここで

$$\pi_1(0) > \pi_2(0) \Rightarrow b(0) > 0,$$

$$\pi_1(N) < \pi_2(N) \Rightarrow b(N) < N$$

  とする．また，

$$\pi_1(0) \leq \pi_2(0) \Rightarrow b(0) = 0,$$

$$\pi_1(N) \geq \pi_2(N) \Rightarrow b(N) = N$$

  とする．

[53] この様なアプローチの先駆的論文は Foster and Young [11] である．
[54] 以下の議論は Kandori, Mailath and Rob [21] に基づく．直感的理解のためには [21] の第 2 節が非常にわかりやすい．
[55] このゲームは，(i)$(a-c)(d-b) < 0$: 支配戦略が存在する場合，(ii)$a > c, d > b$: coordination ゲーム，(iii)$a < c, d < b$: 一意的な対称混合戦略ナッシュ均衡を持つゲーム，となる．

次に各々のプレーヤーは確率 ε で“突然変異”するとする．つまり，各プレーヤーは ε でこのゲームから離れていくが，その変わりに二つの戦略を $\frac{1}{2}$ の確率でプレーする新たなプレーヤーが外部から浸入してくるとする．

これは次のような確率差分方程式[56] を生む．

$$z_{t+1} = b(z_t) + x_t - y_t \tag{11}$$

この (11) は，有限の状態空間 $Z = \{0, 1, 2, \cdots, N\}$ 上のマルコフ連鎖を構成する．推移確率は

$$P_{ij} = \Pr(z_{t+1} = j | z_t = i)$$

であり，$P = (p_{ij})$ をマルコフ行列とする．$q(t)$ を t 時点における状態空間 Z 上の確率分布を示す行ベクトル[57] とすると，この確率分布の動きは $q(t+1) = q(t)P$ で与えられる．

$$\pi = \pi P$$

を満たす $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_N) \in \Delta_N$ を**定常分布** (stationaly distribution) という．

突然変異がない場合，長期的な結果は初期値に依存することになる[58]．しかし，突然変異がある場合には，長期的には初期値依存性は消滅する．すなわち $\varepsilon > 0$ のとき，唯一の定常分布 $\pi(\varepsilon)$ が存在し，全ての初期値 $q(0)$ に対して，

1. $\lim_{t \to \infty} q(t) = \pi(\varepsilon)$
2. $\pi(\varepsilon)$ は各々の状態で費やされる時間についての比率を表わす[59]

を満たす[60]．

さて，ε が小さいときのシステムの長期的振る舞いは，次の極限分布を使い考察できる．

定義 4.1

$$\pi^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \pi(\varepsilon)$$

が存在するとき，π^* を**極限分布** (limit distribution) という．□

そしてこの極限分布の support[61] を長期均衡と呼ぶ．すなわち，

定義 4.2 $C(\pi^*)$ を**長期均衡** (long run equilibrium) という．□

長期均衡を見つけるために，まず，tree の概念を導入する．

定義 4.3 有限集合 $Z = \{0, 1, \cdots, N\}$ 上の z–tree h とは，Z の要素の順序ペア $(i \to j)$ の集まりであり，$Z \setminus \{z\}$ の全ての状態が一つの“矢”の出発点であり，$Z \setminus \{z\}$ 任意の状態から z に至る一つの矢の列が存在するもののことをいう．□

---

[56] ここで x_t と y_t は二項分布に従う，すなわち，$x_t \sim B(N - b(z_t), \varepsilon)$，$y_t \sim B(b(z_t), \varepsilon)$ である．

[57] $q(t) = (q_0(t), q_1(t), \cdots, q_N(t))$ とすると，$q(t)$ は N–次元単体 $\Delta_N = \{q(t) \in \mathbb{R}^{N+1} | q_1(t) \geq 0, \sum_i q_i(t) = 1\}$ の要素である．

[58] 例えば，$a = 2, b = c = 0, d = 1$ の場合を考えると，z_t は N，0 あるいは（$N/3$ が自然数であれば）$N/3$ のどれかの値に収束する．

[59] エルゴード性と呼ばれる．

[60] これらの特性は任意の既約・非周期的な有限マルコフ連鎖について成り立つものである．

[61] $q = (q_0, q_1, \cdots, q_N) \in \Delta$ の support とは，$C(q) = \{i \in Z | q_i > 0\}$（ここで $Z = \{0, 1, \cdots, N\}$）である．

すべての z–tree h の集まりを H_z と表わす．定常分布 μ を得るために，μ に比例的なベクトル q を構成する．各々の z–tree に対して，tree に沿った推移確率を乗じ，それをすべての z–tree について合計する．これを q_z とすると，

$$q_z = \sum_{h \in H} \prod_{(i \to j) \in h} p_{ij} \tag{12}$$

となる．このとき，

補題 4.1 [62]
$q = (q_0, \cdots, q_N)$ は $\mu = (\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_N) \in \Delta_N$ に比例的である．◦

ここで

$$\mu_z^* = \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_z = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{q_z(\varepsilon)}{\sum_i q_i(\varepsilon)}$$

であるから，$\mu_z^* > 0$ となるのは，$q_z(\varepsilon)$ が（$q_0, \cdots, q_N$ の中で）最も遅いスピードで 0 に収束するときである．もし μ_z^* が一つであれば，極限分布はそのような状態 μ_z^* に確率 1 を与える．v_z を q_z が 0 に収束する率であるとする，すなわち，$q_z = O(\varepsilon^{v})$ とする[63]．また (12) から，c_{ij} を $\varepsilon \to 0$ のとき p_{ij} が 0 に収束するスピードとする，つまり $p_{ij} = O(\varepsilon^{c})$ とすると，

$$v_z = \min_{h \in H} \sum_{(i \to j) \in h} c_{ij} \tag{13}$$

である．

一つの矢 $(i \to j)$ に対して，c_{ij} を i から j へ転換するコストと考える．このとき，$p_{ib(i)} \to 1$ $(\varepsilon \to 0)$ であるから，$c_{ib(i)} = 0$ である．コスト c_{ij} は $(i \to j)$ の変換のために必要となる突然変異の数と解釈することができる．突然変異が存在しない状態においては $b(i)$ は i から到達可能であるから，j に到達するためには少なくとも $|b(i) - j|$ の突然変異が必要である．

補題 4.2 [64]

$$c_{ij} = |b(i) - j| \tag{14}$$

◦

(13) と (14) より

$$v_z = \min_{h \in H} \sum_{(i \to j) \in h} |b(i) - j|$$

がわかる[65]．

以上で極限分布 μ^* を決定できる．q の各成分は ε の多項式 $q_z = \sum_{v=0}^{N} a_z(v)\varepsilon^v$ である．ただし，ある $a_z(v)$ は 0 であるかもしれない．明らかに $v_z = \min\{v | a_z(v) \neq 0\}$ である[66]．$v^* = \min_z v_z$，$a^* = (a_0(v^*), \cdots, a_N(v^*))$ とすると，

定理 4.3　極限分布 μ^* は一意に存在する．とくに

$$\mu_z^* = \frac{a_z^*}{\sum_i a_i^*}.$$

[62] Kandori, Mailath and Rob [21].
[63] もし $q_z(\varepsilon)$ が 0 に収束しないのであれば，$v_z = 0$ である．
[64] Kandori, Mailath and Rob [21]
[65] これは z に到達する最少の突然変異の数を表わしている．
[66] もし q_z が 0 に収束しないならば，$a_z(0) \neq 0$ であり，$v_z = 0$ である．

さらに長期均衡は

$$C(\mu^*) = \mathrm{argmin}_{z\in Z} v_z$$

で与えられる．□

以上を応用して**Kandori,Mailath and Rob [21]** は次の一連の結果を得ている．

定理 4．4　段階ゲームが支配戦略を持つものとする．このとき，任意のプレーヤーの数 $N \geq 2$ と (D) を満たす任意の調整過程について，極限分布は

- もし s_1 が支配戦略ならば，N に確率 **1** を，
- もし s_2 が支配戦略ならば，N に確率 **0** を与える．□

定理 4．5　段階ゲームがcoordinationゲームであり，$z^* \neq N/2$ であるとする[67]．このとき，任意のプレーヤーの数 $N \geq 2$ と (D) を満たす任意の調整過程について，極限分布は

- もし $z^* < N/2$ ならば，N に確率 **1** を，
- もし $z^* > N/2$ ならば，N に確率 **0** を与える．□

系 4．6　段階ゲームがcoordinationゲームであり，$z^* \neq N/2$ であるとする．もし $N \geq 2(a-d)/(a-c-d+b)$ であるならば，長期均衡が一意に存在し，リスク支配戦略になる．□

系 4．7　段階ゲームがcoordinationゲームであり，ふたつの均衡は同じsecurity lebelをもち ($b = c$)，かつ $a > d$ であるとする．このとき，すべての $N \geq 2$ について，長期均衡が一意に存在し，それはパレート効率的均衡である．□

定理 4．8　段階ゲームがcoordinationゲームであり，$z^* = N/2$ であるとする．任意の $N \geq 4$ と **(D)** を満たす任意の調整プロセスに対して，長期均衡は $E_1 = (s_1; s_1)$ と $E_2 = (s_2; s_2)$ である．さらに，極限分布はその両方の均衡に確率 $\frac{1}{2}$ を与える．

4.2　簡略化したDiamond,D.and P.Dybvigモデルへの応用(II)

再び，簡略化した**Diamond,D.and P.Dybvig**モデルを考えよう．

いま預金者が有限 **(N人:偶数)** であるとする．また銀行は $\frac{N}{2}$ 行あり，一つの銀行に二人が預金するとしよう．ここでは，**3.5**節とは違って，離散時間 $t = 1; 2; \cdots$ で預金者のゲームが行われると考える．

このとき，**Matrix**“**DD**”を**Matrix**“**KMR**”に置き換えれば，前節の議論がそのまま応用できる．**Matrix DD**で表されるゲームは**coordination**であるから，例えば定理**4. 5** を使えば，

$$\frac{N}{2} > \frac{R-r}{R+r-2D} \tag{15}$$

であれば極限分布は N に確率 **0** を与えることになる．もし $R - D < D - r$ ならば — これはプロジェクト完了前に資金を回収したときの額 r が小さい場合に成立し得るであろう — 式 **(15)** は必ず満たされるので，このとき預金者の初期状態にかかわらず，“ 極限 ”では銀行取付は生じないことになるのである．

[67] ここで，$z^* = [N(d-b)+a-d]/(a-c+d-b)$ であり，これは本質的に，s_1 に確率 $(d-b)/(a-c+d-b)$ を与える混合戦略に等しい．

参考文献

[1] 青木統夫 (1996),『力学系・カオス』, 共立出版.

[2] 青木昌彦・奥野正寛編著 (1996),『経済システムの比較制度分析』, 東京大学出版会.

[3] **Aubin,J.P and A.Cullina(1984),**Di ãerential Inclusions. **Springer{Verlag.**

[4] **Aubin,J.P and H.Frankowska(1990),**Set{Valued Analysis. **Birkhäuser.**

[5] **Brown,G.W(1951),Iterateve solutions of games by åctitious play, pp.374{376 in T.C.Koopmans (eds.)**Activity Analysis of Production and Allocation**, New York:Wiley.**

[6] **Collet,P and J.P.Eckmann(1980),**Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.**Birkhäuser.** (『カオスの出現と消滅』森訳,1993, 遊星社)

[7] **Cressman,R(1992), Evolutionarily stable sets in symmetric extensive two{person games.** Mathematical Bioscience**,108,179{201.**

[8] **Day,R.H(1994),**Complex Economic Dynamics.**MIT Press.**

[9] **Diamond,D.and P.Dybvig(1983),Bank runs,deposit insurance,and liquidity.** Journal of Political Economy**,91,401{19.**

[10] **Eichberger,J(1993),**Game Theory for Economists. **Academic Press.**

[11] **Foster,D.and P.Young(1990), Stachastic evolutionary game dynamics.** Theoretical Population Biology**,38,219{32.**

[12] **Fudenberg,D and D.K.Levine(1996),**Theory of Leaning in Games. **unpublished.**

[13] **Guckenheimer,J and P.Holmes(1983),**Nonlinear Osillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.**Springer{Verlag.**

[14] **Gilboa,I.and A.Matsui(1991), Social stability and equilibrium.** Econometrica**,59(3),859{67.**

[15] **Hines,W.G.S(1980), Three characterizations of population strategy stability.**Journal of Applied Probability**,17,333{40.**

[16] **Hofbauer,J(1981), On the occurence of limit cyxles in Volterra{Lotka equation,**Nonlinear Analysis**,5,1003{1007.**

[17] **Hofbauer,J and K.Sigmund(1984),** The Theory of Evolution and Dynamical Systems.**Cambridge University Press.** (『生物の進化と微分方程式』竹内訳,1990, 現代数学社)

[18] **Hommes,C.H(1991)**Chaotic Dynamics in Economic Models. **Wolters{Noordhoã.**

[19] 神取道宏 (1994),「ゲーム理論による経済学の静かな革命」, 岩井・伊藤編『現代の経済理論』第I章, 東京大学出版会.

[20] **Kandori,M(1996),Evolutionary game theory in economics.** Discussion Papers 96{F{4,University of Tokyo**.**

[21] **Kandori,M.,Mailath,G.and R.Rob(1993), Learning,mutation,and long run equilibria in games.** Econometrica**,61,29{56.**

[22] **Li,T.Y and J.A.Yorke(1975),Period three implies chaos.** American Mathematical Monthly**,82,985{ 992.**

[23] **Lorents,H.W(1989),**Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion. **Springer{Verlag.**

[24] **Mailath,G(1992), Introduction:Symposium on evolutionary game theory.** Journal of Economic Theory**,57,259{77.**

[25] **Matsui,A(1992), Best response dynamics and social stable strategies.** Journal of Economic Theory**,57,343{62.**

[26] **Medio,A(1992),**Chaotic Dynamics.**Cambridge University Press.**

[27] **西村・矢野(1993{1994),経済セミナー | 経済成長とカオス,日本経論社**

[28] **Rand,D(1978), Exotic phenomena in games and duopoly models,** Journal of Mathematical Economics.**5,173{184.**

[29] **Selten,R(1983), Evolutionary stability in extensive two{person games.** Mathematical Social Science**,5,269{363.**

[30] **Skyrms,B(1992),Chaos in game dynamics.**Journal of Logic,Language, and Information**,1,111{130.**

[31] **Smith,J.M(1982),** Evolution and the Theory of Games. **Cambridge University Press.（『進化とゲーム理論』寺本,梯訳,1985, 産業図書）**

[32] **Swinkels,J(1992), Evolutionary stability with equilibrium entrants.** Journal of Economic Theory**,57,306{32.**

[33] **Taylor,P.D and L.B.Jonker(1978), Evolutionarity stable strategies and game dynamics,**Mathematical Biosciences**,40,145{156.**

[34] **van Damme,E(1994), Evolutionary game theory.** European Economic Review**,38,847{58.**

[35] **van Damme,E(1991),** Stability and Perfection of Nash Equilibria. **Springer{Verlag.**

[36] **Vega{Redondo,F(1996),**Evolution,Games,and Economic Behaviour. **Oxford University Press.**

[37] **Weibull,J(1995),** Evolutionary Game Theory.**MIT Press.**

[38] **Zeeman,E.C(1980),Population dynamics from game theory, pp.471{497 in Z.Nitecki and C.Robinson (eds.)** Global Theory of Dynamical Systems. **Lecture notes in Math. 819,Springer{Verlag.**

[39] **Zeeman,E.C(1981), Dynamics of the evolution of animal conçicts,** Journal of Theoretical Biology**,89,249{270.**